Notation :

on note par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

($T \in \mathcal{D}'$)

Rqs :

- une distribution T est une distribution réelle si $\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$
- Tout distribution peut s'écrit sous la forme : $T = R + iS$ où R et S deux dist. réelles.
  avec : pour $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $\langle T, \varphi \rangle = \langle R, \varphi \rangle + i \langle S, \varphi \rangle$
- si T est une distribution complexe ;
  on définit la distribution conjugué notée $\overline{T}$ par :
  $\langle \overline{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle}$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$
- soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ et λ : scalaire, Alors $(T_1 + T_2)$ et (λT_1) sont des dist. :
  - $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$; $\forall \varphi \in \mathcal{D}$
  - $\langle \lambda T_1, \varphi \rangle = \lambda \langle T_1, \varphi \rangle$; $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

  Donc $\mathcal{D}'$ est un e.v.

Déf :

- Une dist T est dite positive si : $\forall \varphi \in \mathcal{D}$; $\varphi \geq 0$ on a : $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$
- une dist T est dite nulle sur Ω si : $\langle T, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ avec $\text{supp}\varphi \in \Omega$
- $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$: on a $T_1 = T_2$ sur Ω ; si : $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$; $\varphi \in \mathcal{D}$
- Le support d'une dist T est le complémentaire Ω plus grand ouvert sur lequel T s'annule. $\text{supp} T \subset \Omega$

3. Exemples des distributions :

a. Distribution associée à une fonction localement intégrable :

Déf 1 : une f.c.s f est dite localement intégrable sur Ω (note : $f \in L^1_{loc}(\Omega)$)
si elle intégrable sur tout compact inclu dans Ω
(c-à-d pour tout compact K de $\mathbb{R}$ $\int_K |f(x)| dx < +\infty$)

Déf 2 : soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, Alors l'app définie par :

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K} \ (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$
$$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx \text{ est une}$$

(2)

dist associée à f.

Rque: ⊛ Cas $\Omega = \mathbb{R}$: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

⊛ Cas $\Omega = \mathbb{R}^2$: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$; $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy$

Dém (EX): ($\Omega = \mathbb{R}$)

⊛ soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; il existe $[-a,a] \subset \mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$

on a $\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx$: $\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx = \int_{-a}^{a} |f(x)||\varphi(x)|\,dx$ ($< +\infty$ car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (borné))

$\leq \sup_{x\in[-a,a]} |\varphi(x)| \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx < +\infty$

⊛ T_f est une Dist, en effet:

• (avec la théorème de l'intégrale)

$\langle T_f, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \langle T_f, \varphi_2 \rangle$

$\langle T_f, \alpha\varphi_1 \rangle = \alpha \langle T_f, \varphi_1 \rangle$

• soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ tq $\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$ mque: $\langle T_f, \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle T_f, \varphi \rangle$?

$|\langle T_f, \varphi_n \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle| = |\langle T_f, \varphi_n - \varphi \rangle| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_n(x) - \varphi(x))\,dx\right|$

$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx \leq \sup_{x\in K \text{ compact}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ($< +\infty$)

($\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_K$)

$\to 0$

[$\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$

• $\exists$ un compact K tq $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$

• $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sup_K |\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}| \xrightarrow[+\infty]{} 0$]

Rq:

• f est localement intégrable donc elle est $\in \mathcal{D}'$ (distrib.)

• Tout fct continue $\Rightarrow$ elle est localement intégrable.

Exp: (Exercice 3)

Rque: si $\Omega = \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$

-b- Distribution de Dirac:

Déf: soit $a \in \mathbb{R}$, la forme linéaire définie par: ($\delta_a = \delta_0 = \delta$)

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}\ (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$
$$\varphi \longmapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

(dist. à l'origine pour $a=0$)

est une dist. de Dirac en a.

Exp (Exercice 4) (cas général: $\text{supp}\ \delta_a = \{a\}$)

4- Dérivation au sens de distribution:

Déf: on appelle dérivée d'une distribution T, la dist notée T' définie par la relation: $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

(si T est une dist $\Rightarrow T'$ est dist)

(Exercice 11)

App (Ex 14):

App (Ex 12)

-5- Opérations sur les distributions:

* **Déf:**

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ Alors (gT) est une distribution définie par

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \quad , \varphi \in \mathcal{D}$$

* **App (Ex g):**

* **proposition 1:**

Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $g \in \mathcal{C}^\infty$ Alors la suite (gT) est dérivable et on a :

$$(gT)' = g'T + gT'$$

$g'T$: distribution produit

gT' : distribution produit

* **App (Ex 10):**

* **proposition 2:**

$T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty$, on a:

-1- $(g_1 + g_2)T_1 = g_1 T_1 + g_2 T_1$

-2- $(g_1 g_2)T_1 = g_1 (g_2 T_1)$

-3- $g_1(T_1 + T_2) = g_1 T_1 + g_1 T_2$

* **Déf:** Soit $T \in \mathcal{D}'$; Notons:

- $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$
- $\check{f}(x) = f(-x)$
- $(h_a f)(x) = f(ax)$

Alors on a:

① $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$

② $\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$

③ $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$

① Dém (Distribution régulière)

par exp: $\langle T_{f(ax)}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)\,dx$

$f(x-a)$

(5) $f(-x)$

Chgt de variable $y = ax$, $x-a$, $-x$

*App: (Ex 16)

6- Convergence d'une suite des distributions:

*Déf: Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions. On dit que T_n converge vers la distribution T si: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ Dona: $\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ et on note:

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$$

*Exp: Calculer $\lim_{k\to+\infty} \delta_k = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ Dona: $\lim_{k\to+\infty} \langle \delta_k, \varphi(x)\rangle = \lim_{k\to+\infty} \varphi(k) = 0$ car φ est à support compact

Donc $\delta_k \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}'} 0$

*App: Calculer:

1- $\lim_{n\to+\infty} n(\delta_{1/n} - \delta_{\frac{1}{n}})$

2- $\lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2}(\delta_{2n} + \delta_{-2n} - 2\delta)$

3- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} T_{e^{-n^2x^2}}$

4- $\lim_{n\to+\infty} T_{\sin(nx)}$

*Corr: Soit $\varphi \in \mathcal{D}$

1- $\lim_{n\to+\infty} \langle n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}), \varphi(x)\rangle = \lim_{n\to+\infty} n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} n\left[\varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) - \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0)\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{2}{n}\varphi'(0)\right]$

$= 2\varphi'(0) = 2\langle \delta_0, \varphi'(x)\rangle = -2\langle \delta', \varphi\rangle = \langle -2\delta', \varphi\rangle$

D.L: $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi^{(3)} + \dots$

Alors: $\lim_{n\to+\infty} n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}) = -2\delta'$

2- $\lim_{n\to 0} \left\langle \frac{1}{n^2}(\delta_{2n} + \delta_{-2n} - 2\delta), \varphi\right\rangle = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2}(\varphi(2n) + \varphi(-2n) - 2\varphi(0))$

$= \lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2}\left[\varphi(0) + 2n\varphi'(0) + \frac{(2n)^2}{2}\varphi''(0) + \varphi(0) - 2n\varphi'(0) + \frac{(-2n)^2}{2}\varphi''(0) - 2\varphi(0)\right]$

$= \lim_{n\to 0} \frac{4}{n^2} n^2 \varphi''(0) = 4\varphi''(0) = 4\langle \delta, \varphi''(x)\rangle = \langle 4\delta'', \varphi\rangle$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}(\delta_{2n} + \delta_{-2n} - 2\delta) \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}'} 4\delta''$

3- $\left\langle \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, \varphi(x)\right\rangle = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2x^2}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$

$y = nx \Leftrightarrow dy = n\,dx$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) dx \overset{TCD}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(e^{-x^2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right) dx$$

Intégrale de Gauss

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi(0)\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \sqrt{\pi} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

* TCD : • $x \longmapsto e^{-y^2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ est une suite de fct.

• $e^{-y^2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[+\infty]{} \varphi(0) e^{-y^2}$: intég

• $\left| e^{-y^2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \|\varphi\|_{+\infty} e^{-y^2}$: intég.

-4- $\lim_{n\to+\infty} \langle \sin(nx), \varphi(x) \rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\langle \sin(nx), \varphi(x) \rangle = \int_{-a}^{a} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx$$

IPP : $\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x)$

$\sin(nx) \longmapsto \frac{-1}{n} \cos(nx)$

$$= \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\, \varphi(x) \right]_{-a}^{a} + \frac{1}{n} \int_{-a}^{a} \cos(nx)\, \varphi'(x)\, dx$$

Alors :

$$\left| \langle \sin(nx), \varphi(x) \rangle \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-a}^{a} \left| \cos(nx) \right| \left| \varphi'(x) \right| dx$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{n} \sup \left| \varphi'(x) \right| \int_{-a}^{a} dx}_{-2a}$$

$\downarrow n \to +\infty$

0

Alors : $\sin(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{ds\, \mathcal{D}'} 0$

Prop : (convergence de dérivée)

Soit $(T_n)_n$ une suite de dist. qui CV vers la dist. T. Alors la suite $(T_n')_n$ converge vers T'

Exemple : Soit la suite : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$;

f_n converge vers zero mais au sens de fct, la suite $(f_n') = (\cos(nx))_n$ diverge

mais : suites de dist. : $\cos(n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{dans\ D'} 0$

7- Produit de Convolution des distributions :

Déf : on définit le produit de convolution de 2 dist. S et T (si elle existe) par : $\langle S*T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$

où S_x (resp T_y) désigne par le dist. S s'applique qu'à la variable x (resp T s'applique à la variable y)

Exple : Calculer $\delta_a * \delta_b = ?$

Soit $\varphi \in D$ ona : $\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_{a,x}, \langle \delta_{b,y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$= \langle \delta_{a,x}, \varphi(x+b) \rangle$

$= \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi(x) \rangle$

$\Rightarrow \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

$\langle \delta_a(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(a)$

Propriété :

1- $S*T = T*S$

2- $T*\delta = \delta*T = T$ (c-à-d : δ_0 c'est l'élément neutre de $*$)

3- $(T*S)' = T'*S = T*S'$

cas général :

- $(T*S)^{(n)} = T^{(n)} * S = T * S^{(n)}$
- $D^\alpha(T*S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S$

Ex : mque : $\delta_a * T = \tau_a T$?

Soit $\varphi \in D$ ona : $\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle \delta_{a,x} \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$= \langle T*\delta_a, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle \delta_{a,y}, \varphi(x+y) \rangle \rangle$

$= \langle T_x, \varphi(x+a) \rangle = \langle T_x, \tau_a \varphi(x) \rangle = \langle \tau_a T, \varphi \rangle$

Exercice 2 :

Calculer : i) $\delta' * T_H(x)$ ii) $\delta' * T_{\sin x\, H(x)}$ iii) $(\delta' + T_H)' * T_{\cos x\, H(x)}$

Rép :

- i - $\delta' * T_H = (\delta * T_H)' = T_H' = \delta$

- ii - $\delta' * T_{\sin x\, H(x)} = (\delta * T_{\sin x\, H(x)})' = (T_{\sin x\, H(x)})'$

$= (\sin x * T_H)' = (\sin x)' T_H + \sin x\, T_H'$

$= \cos x\, T_H + \sin x\, \delta$

$= \cos x\, T_H + \underbrace{\sin(0)}_{=0}\delta = \cos x\, T_H = T_{\cos(x)\, H(x)}$

$T_{\sin x\, H(x)} = \sin x\, T_{H(x)} = \sin x\, H(x)$

- iii - $(\delta' + T_H)' * T_{\cos x\, H} = \left((\delta' + T_H) * T_{\cos x\, H}\right)'$ $\left[(\delta'' + T_H') * \cos x H\right]$

$= \left(\delta' * T_{\cos x} H + T_H * T_{\cos x\, H}\right)'$ $\left[\delta'' * \cos x H + T_H' * \cos x H\right]$

$= \left[\left(\delta * T_{\cos x\, H}\right)'' + \left(T_H * T_{\cos x\, H(x)}\right)'\right]$ $\left[\left(\delta * \cos x\, T_H\right)'' + T_{\cos x H}\right]$

$= \left(-\sin x\, T_H + \cos x\, \delta\right)' + T_{\cos x\, H}$

$= -\cos x\, T_H + \delta' + \left(T_H * T_{\cos x\, H}\right)'$

$= -\cos x\, T_H + \delta' + \left(T_H' * T_{\cos x\, H}\right)$

$= -\cos(x)\, T_H + \delta' + \delta * T_{\cos x\, H}$

$= -\cos x\, T_H' + \delta' + T_{\cos x\, H} = \delta'$

$= (\cos x\, T_H)'' + T_{\cos x\, H(x)}$

$= \left(-\sin x\, T_H + \underbrace{\cos x\, \delta}_{\cos 0\, \delta = \delta}\right)' + T_{\cos x\, H}$

$= (\sin x)' T_H - \underbrace{\sin x\, \delta}_{=0} + \delta' + T_{\cos x\, H(x)}$

$= -\cos x\, T_H + T_{\cos x\, H} + \delta'$

$= -T_{\cos x\, H} + T_{\cos x\, H} + \delta'$

$= \delta'$

Exple 3 : Calculer le produit de convolution : $H(x) * x^2 H(x) = ?$ (au sens de distribution)

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle H(x) * x^2 H(x), \varphi(x) \rangle = \langle H(x), \langle y^2 (Hy), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^2 \varphi(x+y)\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} y^2 \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx \right) dy$$

Posons : $\psi(y) = \int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx$ $\quad \langle H * x^2 H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} y^2 \psi(y)\, dy$

I pp : $\begin{vmatrix} \psi(y) \to \psi'(y) \\ y^2 \to \frac{1}{3} y^3 \end{vmatrix}$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{3} y^3 \psi(y) \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 \psi'(y)\, dy$$

$\left(\psi(+\infty) = 0 \text{ car } \varphi \text{ fct test} \right)$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 \psi'(y)\, dy = \left\langle T_{\frac{y}{3}} x^3 H(x), \varphi(x) \right\rangle$$

$$\psi(y) = \int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx$$

$$\psi'(y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x+y)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi'(x+y)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x+y)\, dx = \left[\varphi(x+y) \right]_0^{+\infty}$$

$\varphi(+\infty) = 0$

$$= -\varphi(y)$$

$\hat{T} = ?$

$$\langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi x t}\, dt \right) \varphi(x)\, dx$$

$$= \iint f(t) \varphi(x) e^{-2i\pi x t}\, dt\, dx = \int f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2i\pi x t}\, dx \right) dt$$

$$= \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle$$

- 8 - Transformée de Fourier des distributions :

- a - l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'$

$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$

$\varphi \to \langle T, \varphi \rangle$

Déf : on appelle espace schwartz, noté $S(\mathbb{R})$ l'ensemble donnée par :

$$S(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / \forall n,m \in \mathbb{N} \text{ on a : } \lim_{|x|\to+\infty} |x^m \varphi^{(n)}(x)| = 0\}$$

Propriétés :

-1- S est une e.v.

-2- S est stable par T.F (si $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$)

-3- S est stable par $*$ (si $\varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \varphi_1 * \varphi_2 \in S$)

-4- S est stable par derivation (si $\varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$)

-5- S est stable par Multiplication (si $\varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \varphi_1 \varphi_2 \in S$)

-6- S est stable par un polynôme (si $\varphi \in S$, P poly $\Rightarrow P\varphi \in S$)

Exp1 : $f(x) = e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$

Exp2 : $f(x) = e^{-|x|}$

- $\lim_{n\to+\infty} x^m e^{-|x|} = 0$ (décroissante rapide) $\Rightarrow f \notin S(\mathbb{R})$
- $f \notin \mathcal{C}^\infty$

Exp3 : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f \in \mathcal{C}^\infty$
- $x^m \frac{1}{1+x^2} \not\to 0 \Rightarrow f \notin S(\mathbb{R})$

-b- Transformée de Fourier dans S :

Déf (distribution temperée) :

on appelle dist temperée une forme linéaire et continue sur l'espace de Shwartz S et noté $S'(\mathbb{R})$ l'ensemble des dist temperés.

Déf : Toute dist temperée T admet une Transformée de Fourier noté $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$ qui est également une dist temperée elle est définie par :

$$\langle F(T), \varphi \rangle = \langle T, F(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in S$$

$T \in S' \Leftrightarrow T : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$

- linéaire
- continue

$S' \subset D'$

-V- $\langle F[T]^{(k)}, \varphi(x) \rangle = (-1)^k \langle \hat{T}, (x^k \varphi(x))^{\wedge} \rangle = (-1)^k \langle T, F(x^k \varphi(x)) \rangle$

App:
Calculer la T.F de: i/ δ ii/ $e^{2i\pi ax}$ iii/ $\cos x$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} dt \quad \text{et} \quad \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

Rep:

TF soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$

i/ $\langle \hat{\delta}, \varphi(x) \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi}(x) \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle T_1, \varphi \rangle$

TF

$\Rightarrow F(\delta) = 1$

ii/ $\langle F(e^{2i\pi ax}), \varphi(x) \rangle = \langle e^{2i\pi ax}, \hat{\varphi}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi ax} \hat{\varphi}(x) dx$

$= \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$

φ est C^∞ donc en particulier φ est continue en a.

$$\frac{f(x)+f(x)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{2i\pi tx} dt = f(x)$$

iii/ $\langle F(\cos x), \varphi(x) \rangle = ?$ $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{ix} + e^{-ix}\right]$

$F(\cos x) = \frac{1}{2}\left(F(e^{ix}) + F(e^{-ix})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_1}{2\pi}, \frac{\delta_{-1}}{2\pi}\right)$

Propriétés: soit $T \in S'$, on a

i/ $F(T^{(k)}) = (2i\pi x)^k \hat{T}$

ii/ $F(\tau_a T) = e^{-2i\pi ax} \hat{T}$

iii/ $F(h_a T) = \frac{1}{|a|} F(T)\left(\frac{x}{a}\right)$

iv/ la T.F d'une dist paire (resp impaire) est paire (resp impaire)

v/ $(FT)^{(k)} = F\left((-2i\pi t)^k T\right)$

Dém: soit $\varphi \in S$ on a:

- i - $\langle F(T^{(k)}), \varphi(x) \rangle = \langle T^{(k)}, \hat{\varphi}(x) \rangle = (-1)^k \langle T, (\hat{\varphi}(x))^{(k)} \rangle$

$= (-1)^k \langle T, F((-2i\pi t)^k \varphi(t)) \rangle = (-1)^k \langle F(T), (-2i\pi t)^k \varphi(t) \rangle$

$= \langle (2i\pi t)^k \hat{T}, \varphi \rangle (\hat{f}(x))^{(k)} = F((-2i\pi t)^k f(t))$ $\boxed{F[f^{(k)}]}$

-V- $\langle F(T)^{(k)}, \varphi(x)\rangle = (-1)^k \langle \hat{T}, (\varphi(x))^{(k)}\rangle = (-1)^k \langle T, F((-2i\pi x)^k \varphi(x))\rangle$

$= (-1)^k \langle T, (2i\pi x)^k \hat{\varphi}(x)\rangle = \langle (2i\pi x)^k T, \hat{\varphi}(x)\rangle$

$= \langle F(-2i\pi x)^k, \varphi\rangle$

Théorème (admis)

Soient T_1, T_2 deux dist. tempérées à support compact. Alors :

$$F(T_1 * T_2) = \hat{T}_1 \hat{T}_2$$

Théorème :

* l'application TF est continue et bijective de $S(\mathbb{R})$ dans lui même et notée par F^{-1} ou $\bar{F}$ la T.F inverse et on a : $F^{-1}FT = FF^{-1}T = T$

$$\langle F^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, F^{-1}\varphi\rangle$$

App :

-1- calculer la transformé de Fourier de δ_a, $a \in \mathbb{R}$

-2- Dériver la dist. tempérée sur $\mathbb{R}$, $f(t) = 1\!\!1_{[-a,a]}(x)$ pour trouver facilement son T.F.

-3- En déduire la T.F de la dist $1\!\!1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$

Rep : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$ on a

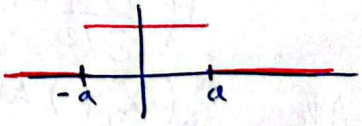
-1- $\langle F(\delta_a), \varphi\rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi}(x)\rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2i\pi at}\, dt = \langle e^{-2i\pi ax}, \varphi(x)\rangle$

$$\Rightarrow \boxed{F(\delta_a) = e^{-2i\pi ax}}$$

-2- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{-a,a\})$ avec $f(a^+) = 0$, $a \in \mathbb{R}$

$f(a^-) = 1$

$f(-a^+) = 1$; $f(-a^-) = 0$



avec la formule des sauts : $f' = 0 + (0-1)\delta_{a^+} + (1-0)\delta_{-a^-} = -\delta_{a^+} + \delta_{-a^-}$

$$= \boxed{\delta_{-a} - \delta_a}$$

-3- on a $T'_{1\!\!1_{[-a,a]}} = \delta_{-a} - \delta_a$; $F(T'_{1\!\!1_{[-a,a]}}) = F(\delta_{-a}) - F(\delta_a)$

$(2i\pi x)\, 1\!\!1_{[-a,a]} = e^{i\pi ax} - e^{-i\pi ax}$

$(2i\pi x)$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_{[-a,a]} = \frac{e^{2i\pi ax} - e^{-2i\pi ax}}{2i\pi x} = \frac{\sin(2\pi ax)}{\pi x}$$

* En particulier pour $a = \frac{1}{2}$;

$$\mathcal{U}_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

-C- Application : EDP :

(eq. dérivé. partiel)

EX1 : on considère le (pb) suivant : (pb) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{on suppose que } u \text{ et toutes les dérivées partielles admettent des T.F l'espace à tout instant } t \end{cases}$$

- 1 - Donner l'équation diff satisfaite par la T.F partielle $\hat{u}(x,t) = \mathcal{F}(u(x,t))(x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi x x}\, dx$$

- 2 - En déduire $u(x,t) = ?$

Rep :

- 1 - on a $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(x,t)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}(x,t)\right)(x) = (2i\pi x)^2 \hat{u}(x,t)$$

Alors $\hat{u}(x,t)$ vérifie l'équat^{n} diff :

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(x,t) - \frac{1}{2}(2i\pi x)^2 \hat{u}(x,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(x,t) + 2\pi^2 x^2 \hat{u}(x,t) = 0 \Leftrightarrow \hat{u}(x,t) \text{ vérifie l'ED O :}$$

$$\hat{u}(x,t) = A\, e^{-\int 2\pi^2 x^2 t} = A\, e^{-2\pi^2 x^2 \frac{1}{2} t^2} \quad \left[y' + 2\pi^2 x^2 x^2 y = 0 \right]$$

$$= A\, e^{-(\pi x t)^2}, \quad A \in \mathbb{R}$$